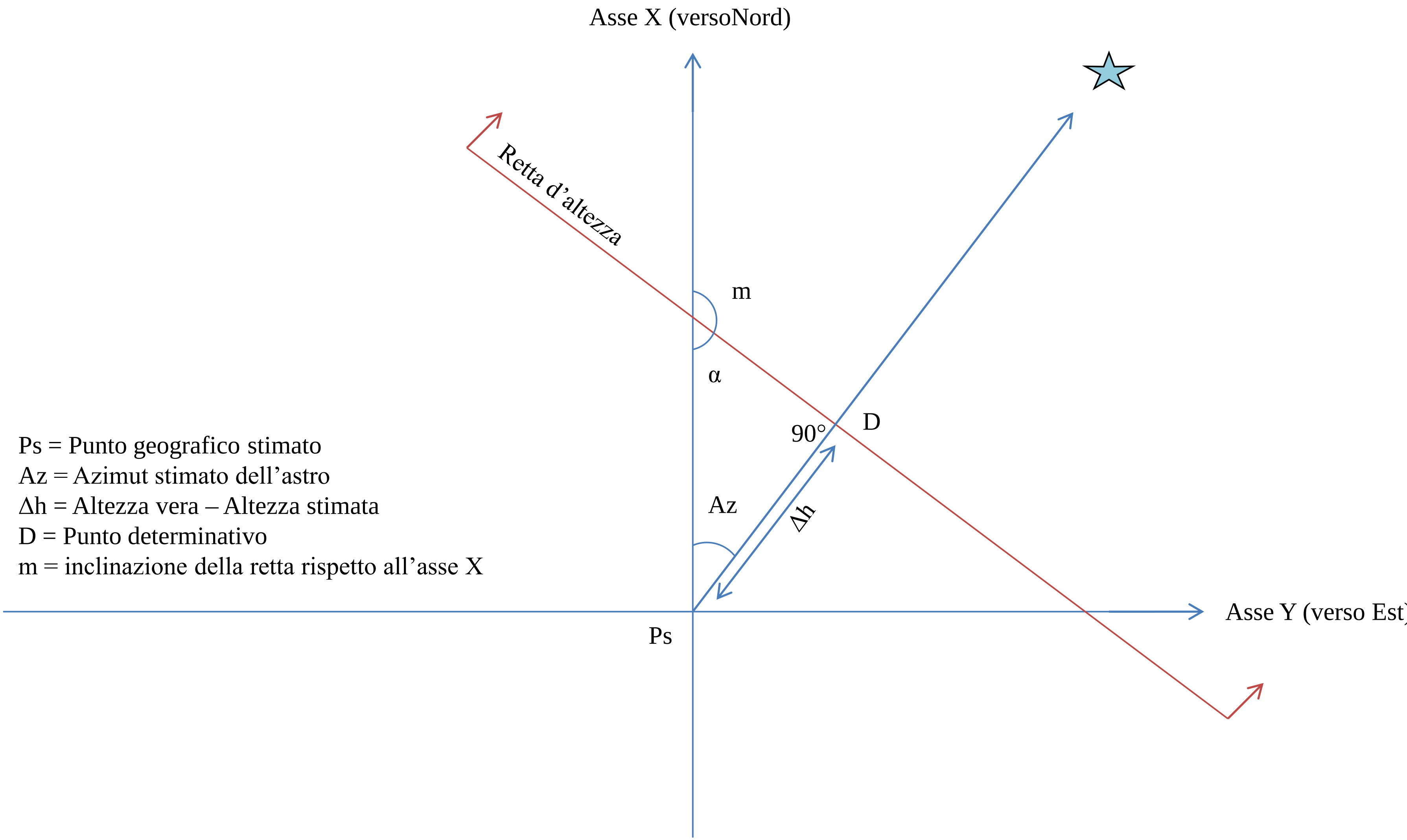
Rette di altezza

Metodo di calcolo Analitico

© Agostino Frosini

Disegno di una retta d’altezza



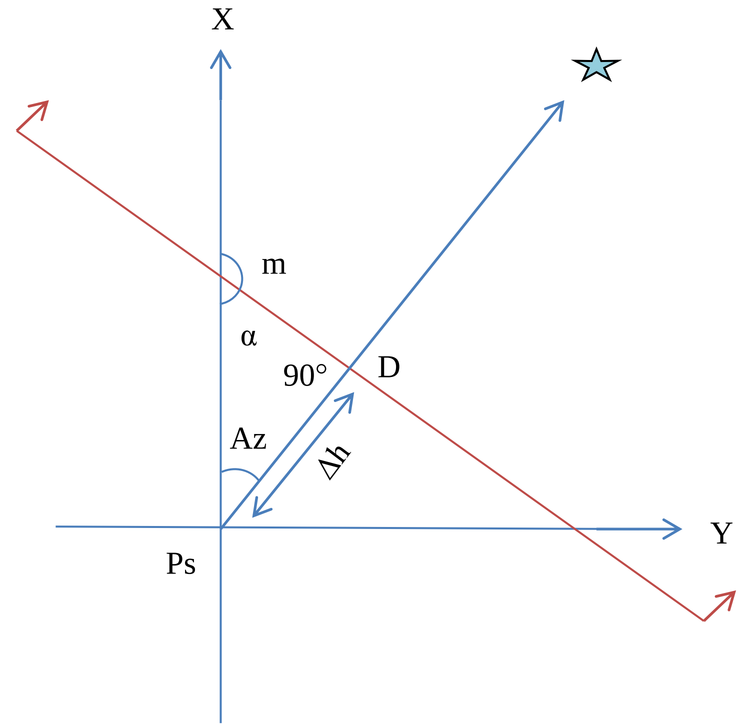
Ps = Punto geografico stimato
Az = Azimut stimato dell’astro
Δh = Altezza vera – Altezza stimata
D = Punto determinativo
m = inclinazione della retta rispetto all’asse X

© Agostino Frosini

Equazione di retta d’altezza (dimostrazione)

$\alpha = 90 - Az$
$m = 180 - (90 - Az) = 180 - 90 + Az$
$m = 90 + Az$
$m = -\text{cotg } Az = -1 / \tan Az$ = inclinazione della retta d’altezza rispetto all’asse X

Le coordinate del punto determinativo D sono: $D \begin{cases} x_o = \Delta h \cos Az \\ y_o = \Delta h \text{ sen } Az \end{cases}$



L’equazione di una retta generica è data da:
$y - y_o = m\,(x - x_o)$
Sostituendo x_o , y_o ed m abbiamo:
$y - \Delta h \text{ sen } Az = -1 / \text{tg } Az\,(x - \Delta h \cos Az)$
$y - \Delta h \text{ sen } Az = -x / \text{tg } Az + \Delta h \cos Az / \text{tg } Az$
Portando l’incognita x a sinistra ed i valori noti a destra avremo:
$y + x / \text{tg } Az = +\Delta h \text{ sen } Az + \Delta h \cos Az / \text{tg } Az$
Siccome la tg Az è anche sen Az / cos Az
Allora il suo inverso ovvero 1 / tg Az è cos Az / sen Az
Quindi sostituendo avremo:
$y + x \cos Az / \text{sen } Az = +\Delta h \text{ sen } Az + \Delta h \cos^2 Az / \text{sen } Az$
Ora moltiplicando tutti i membri per sen Az avremo
$y \text{ sen } Az + x \cos Az \cancel{\text{sen } Az} / \cancel{\text{sen } Az} = \Delta h \text{ sen}^2 Az + \Delta h \cos^2 Az \cancel{\text{sen } Az} / \cancel{\text{sen } Az}$
$y \text{ sen } Az + x \cos Az = \Delta h\,(\cancel{\text{sen}^2 Az + \cos^2 Az})$

Quindi l’equazione della retta d’altezza sarà:

$\mathbf{x \cos Az + y \text{ sen } Az = \Delta h}$

© Agostino Frosini

Punto vero con due rette d'altezza

Il punto nave con due rette si svolge mettendo in sistema le equazioni delle due rette di altezza in modo da trovarne il punto di incontro.

$$\begin{cases} x \cos Az1 + y \text{ sen } Az1 = \Delta h1 \\ x \cos Az2 + y \text{ sen } Az2 = \Delta h2 \end{cases}$$

Soluzione del sistema con il metodo Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \Delta h1 & \text{sen } Az1 \\ \Delta h2 & \text{sen } Az2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos Az1 & \text{sen } Az1 \\ \cos Az2 & \text{sen } Az2 \end{vmatrix}} \Rightarrow x = \frac{\Delta h1 \text{ sen } Az2 - \text{sen } Az1 \, \Delta h2}{\cos Az1 \text{ sen } Az2 - \text{sen } Az1 \cos Az2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos Az1 & \Delta h1 \\ \cos Az2 & \Delta h2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos Az1 & \text{sen } Az1 \\ \cos Az2 & \text{sen } Az2 \end{vmatrix}} \Rightarrow y = \frac{\cos Az1 \, \Delta h2 - \Delta h1 \cos Az2}{\cos Az1 \text{ sen } Az2 - \text{sen } Az1 \cos Az2}$$

© Agostino Frosini

Conclusioni

Una volta risolto il sistema avremo:

$x = \Delta\varphi$ (differenza algebrica tra la latitudine stimata e quella vera)
$y = \Delta\mu$ (differenza algebrica dell' appartamento della longitudine tra la longitudine stimata e quella vera)

Sapendo che:
φv = latitudine vera
φs = latitudine stimata
φm = latitudine media
λv = longitudine vera
λs = longitudine stimata
μ = appartamento della longitudine

Il punto Geografico Vero sarà dato da:

$$\boldsymbol{\varphi v = \varphi s + (\pm x)}$$

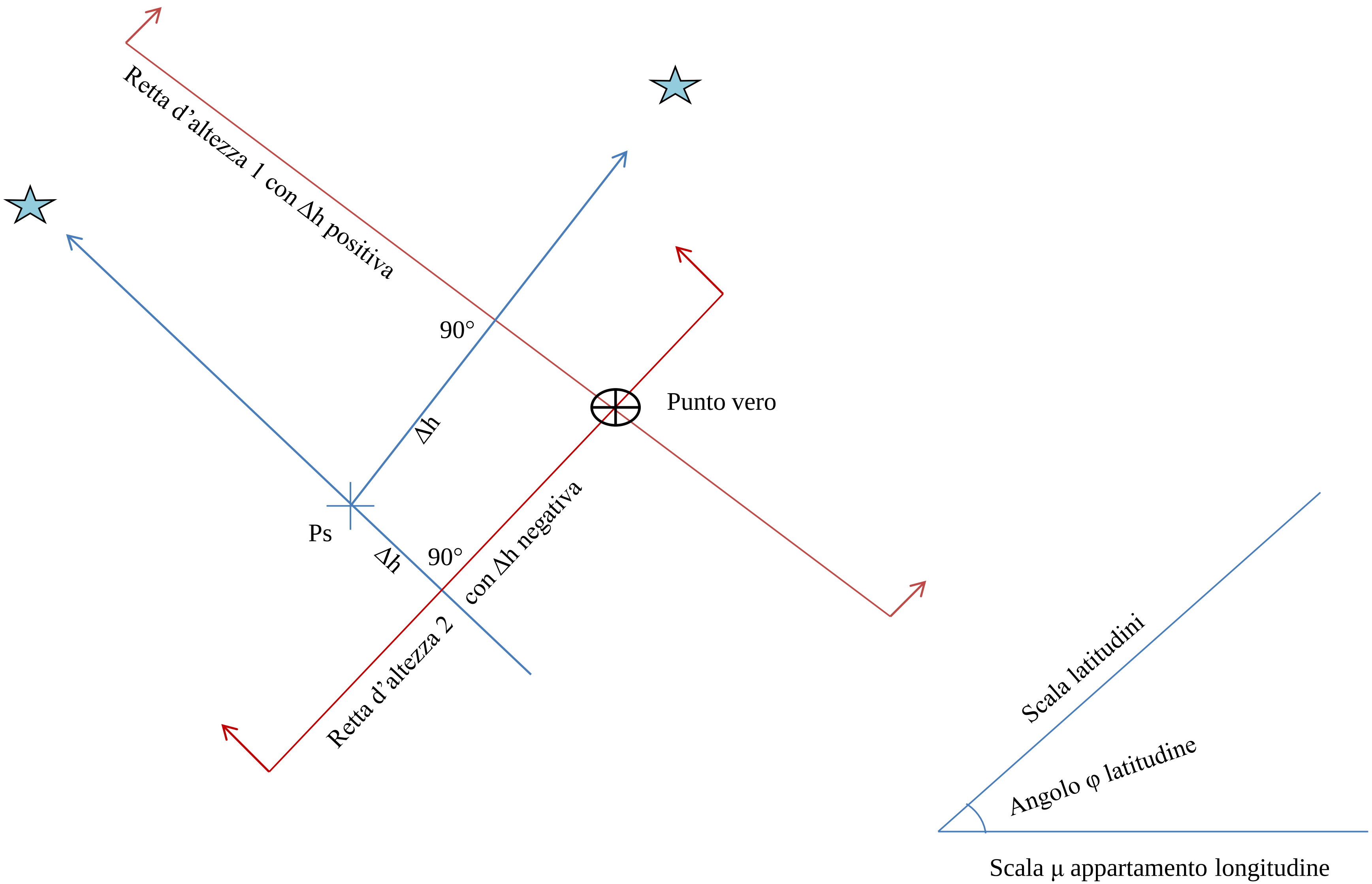
$$\varphi m = (\varphi v + \varphi s) / 2$$

$$\Delta\lambda = (\pm\mu) \cos \varphi m$$

$$\boldsymbol{\lambda v = \lambda s + (\pm\Delta\lambda)}$$

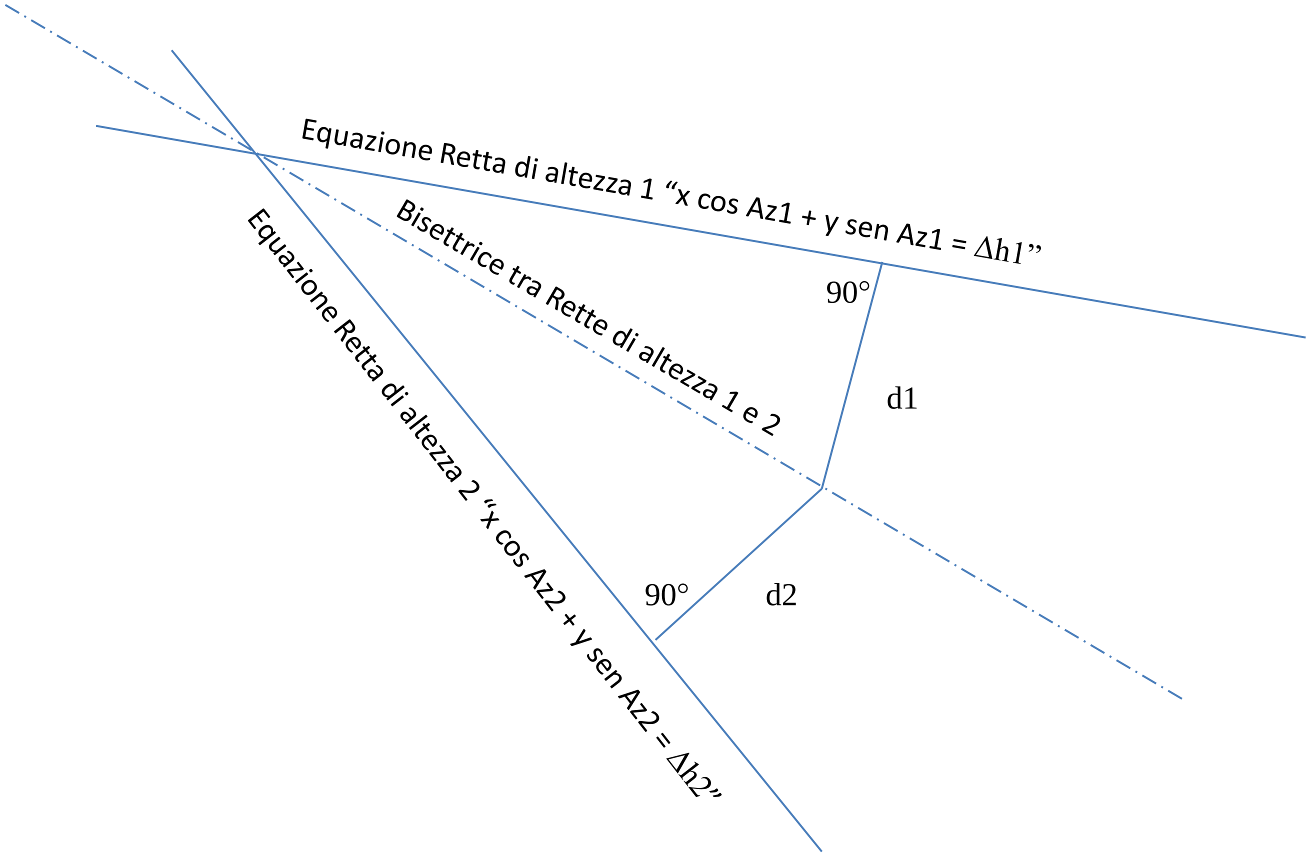
© Agostino Frosini

Soluzione grafica punto vero con due rette d'altezza



© Agostino Frosini

Disegno di una bisettrice tra due rette d’altezza



© Agostino Frosini

Equazione di una bisettrice tra due rette d'altezza (dimostrazione)

$D1 = (x \cos Az1 + y \,\text{sen}\, Az1 - \Delta h1) / \sqrt{\cos^2 Az1 + \text{sen}^2 Az1}$

$D2 = (x \cos Az2 + y \,\text{sen}\, Az2 - \Delta h2) / \sqrt{\cos^2 Az2 + \text{sen}^2 Az2}$

La bisettrice tra due rette d'altezza è caratterizzata dalla equidistanza di ogni suo punto rispetto alle rette, quindi:

$D1 = D2$

Segue che:

$(x \cos Az1 + y \,\text{sen}\, Az1 - \Delta h1) / \sqrt{\cancel{\cos^2 Az1 + \text{sen}^2 Az1}} = (x \cos Az2 + y \,\text{sen}\, Az2 - \Delta h2) / \sqrt{\cancel{\cos^2 Az2 + \text{sen}^2 Az2}}$

$x \cos Az1 + y \,\text{sen}\, Az1 - \Delta h1 = x \cos Az2 + y \,\text{sen}\, Az2 - \Delta h2$

Quindi l'equazione di una bisettrice di altezza è:

$\mathbf{x (\cos Az1 - \cos Az2) + y (\text{sen}\, Az1 - \text{sen}\, Az2) = \Delta h1 - \Delta h2}$

© Agostino Frosini

Punto vero con tre rette d'altezza

Il punto nave con tre rette si svolge mettendo in sistema le equazioni delle bisettrici delle rette ad esempio 1-2 (possibilmente con azimut opposti o perlomeno lontani tra loro) e 1-3 (anch'essi con azimut possibilmente opposti o lontani tra loro) in modo da trovarne il punto di incontro. Nb: la scelta delle bisettrici dipende dagli azimut, quindi potremmo anche usare le bisettrici delle rette 1-2 e 2-3 oppure 1-3 e 2-3
In questo esempio utilizzeremo le bisettrici delle rette 1-2 e 1-3

$$x\,(\cos Az1 - \cos Az2) + y\,(\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az2) = \Delta h1 - \Delta h2$$
$$x\,(\cos Az1 - \cos Az3) + y\,(\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) = \Delta h1 - \Delta h3$$

Soluzione del sistema con il metodo Cramer

$$x = \frac{\begin{matrix} (\Delta h1 - \Delta h2) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az2) \\ (\Delta h1 - \Delta h3) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) \end{matrix}}{\begin{matrix} (\cos Az1 - \cos Az2) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az2) \\ (\cos Az1 - \cos Az3) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) \end{matrix}}$$

$$x = \frac{(\Delta h1 - \Delta h2)\,(\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) - (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az2)\,(\Delta h1 - \Delta h3)}{(\cos Az1 - \cos Az2)\,(\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) - (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az2)\,(\cos Az1 - \cos Az3)}$$

$$y = \frac{\begin{matrix} (\cos Az1 - \cos Az2) & (\Delta h1 - \Delta h2) \\ (\cos Az1 - \cos Az3) & (\Delta h1 - \Delta h3) \end{matrix}}{\begin{matrix} (\cos Az1 - \cos Az2) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az2) \\ (\cos Az1 - \cos Az3) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) \end{matrix}}$$

$$y = \frac{(\cos Az1 - \cos Az2)\,(\Delta h1 - \Delta h3) - (\Delta h1 - \Delta h2)\,(\cos Az1 - \cos Az3)}{(\cos Az1 - \cos Az2)\,(\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) - (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az2)\,(\cos Az1 - \cos Az3)}$$

© Agostino Frosini

Conclusioni

Una volta risolto il sistema avremo:

$x = \Delta\varphi$ (differenza algebrica tra la latitudine stimata e quella vera)
$y = \Delta\mu$ (differenza algebrica dell' appartamento della longitudine tra la longitudine stimata e quella vera)

Sapendo che:
φv = latitudine vera
φs = latitudine stimata
φm = latitudine media
λv = longitudine vera
λs = longitudine stimata
μ = appartamento della longitudine

Il punto Geografico Vero sarà dato da:

$$\boldsymbol{\varphi v = \varphi s + (\pm x)}$$

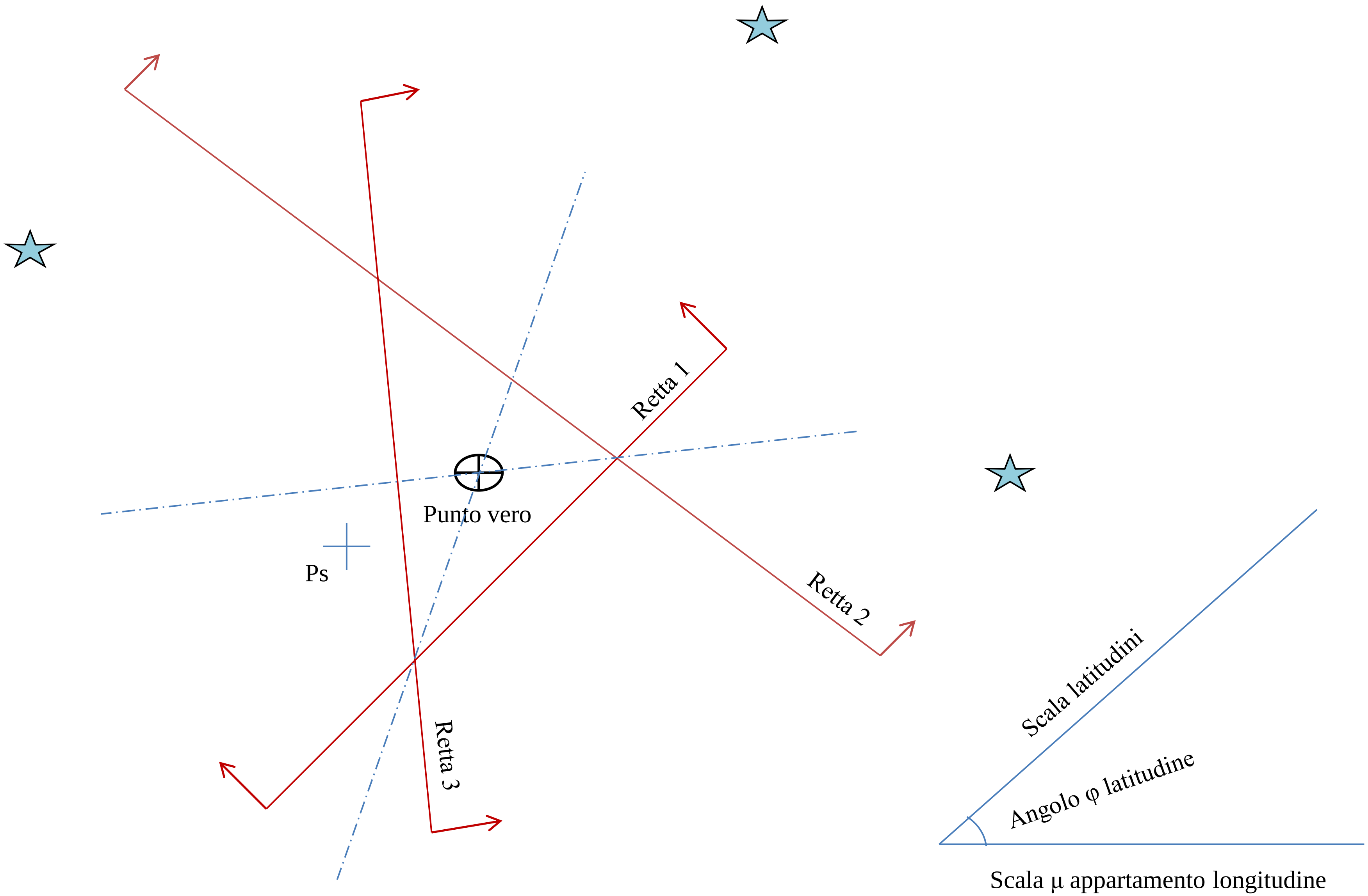
$$\varphi m = (\varphi v + \varphi s) / 2$$

$$\Delta\lambda = (\pm\mu) \cos \varphi m$$

$$\boldsymbol{\lambda v = \lambda s + (\pm\Delta\lambda)}$$

© Agostino Frosini

Soluzione grafica punto vero con tre rette d'altezza



© Agostino Frosini

Punto vero con quattro rette d'altezza

Il punto nave con quattro rette si svolge mettendo in sistema le equazioni delle bisettrici delle rette 1 - 3 (possibilmente opposte tra loro) e le rette 2 - 4 (anch'esse opposte tra loro e complementari alle rette 1 - 3) in modo da trovarne il punto di incontro.

$$x\,(\cos Az1 - \cos Az3) + y\,(\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) = \Delta h1 - \Delta h3$$
$$x\,(\cos Az2 - \cos Az4) + y\,(\operatorname{sen} Az2 - \operatorname{sen} Az4) = \Delta h2 - \Delta h4$$

Soluzione del sistema con il metodo Cramer

$$x = \frac{\begin{matrix} (\Delta h1 - \Delta h3) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) \\ (\Delta h2 - \Delta h4) & (\operatorname{sen} Az2 - \operatorname{sen} Az4) \end{matrix}}{\begin{matrix} (\cos Az1 - \cos Az3) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) \\ (\cos Az2 - \cos Az4) & (\operatorname{sen} Az2 - \operatorname{sen} Az4) \end{matrix}}$$

$$x = \frac{(\Delta h1 - \Delta h3)(\operatorname{sen} Az2 - \operatorname{sen} Az4) - (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3)(\Delta h2 - \Delta h4)}{(\cos Az1 - \cos Az3)(\operatorname{sen} Az2 - \operatorname{sen} Az4) - (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3)(\cos Az2 - \cos Az4)}$$

$$y = \frac{\begin{matrix} (\cos Az1 - \cos Az3) & (\Delta h1 - \Delta h3) \\ (\cos Az2 - \cos Az4) & (\Delta h2 - \Delta h4) \end{matrix}}{\begin{matrix} (\cos Az1 - \cos Az3) & (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3) \\ (\cos Az2 - \cos Az4) & (\operatorname{sen} Az2 - \operatorname{sen} Az4) \end{matrix}}$$

$$y = \frac{(\cos Az1 - \cos Az3)(\Delta h2 - \Delta h4) - (\Delta h1 - \Delta h3)(\cos Az2 - \cos Az4)}{(\cos Az1 - \cos Az3)(\operatorname{sen} Az2 - \operatorname{sen} Az4) - (\operatorname{sen} Az1 - \operatorname{sen} Az3)(\cos Az2 - \cos Az4)}$$

© Agostino Frosini

Conclusioni

Una volta risolto il sistema avremo:

$x = \Delta\varphi$ (differenza algebrica tra la latitudine stimata e quella vera)
$y = \Delta\mu$ (differenza algebrica dell' appartamento della longitudine tra la longitudine stimata e quella vera)

Sapendo che:
φv = latitudine vera
φs = latitudine stimata
φm = latitudine media
λv = longitudine vera
λs = longitudine stimata
μ = appartamento della longitudine

Il punto Geografico Vero sarà dato da:

$$\boldsymbol{\varphi v = \varphi s + (\pm x)}$$

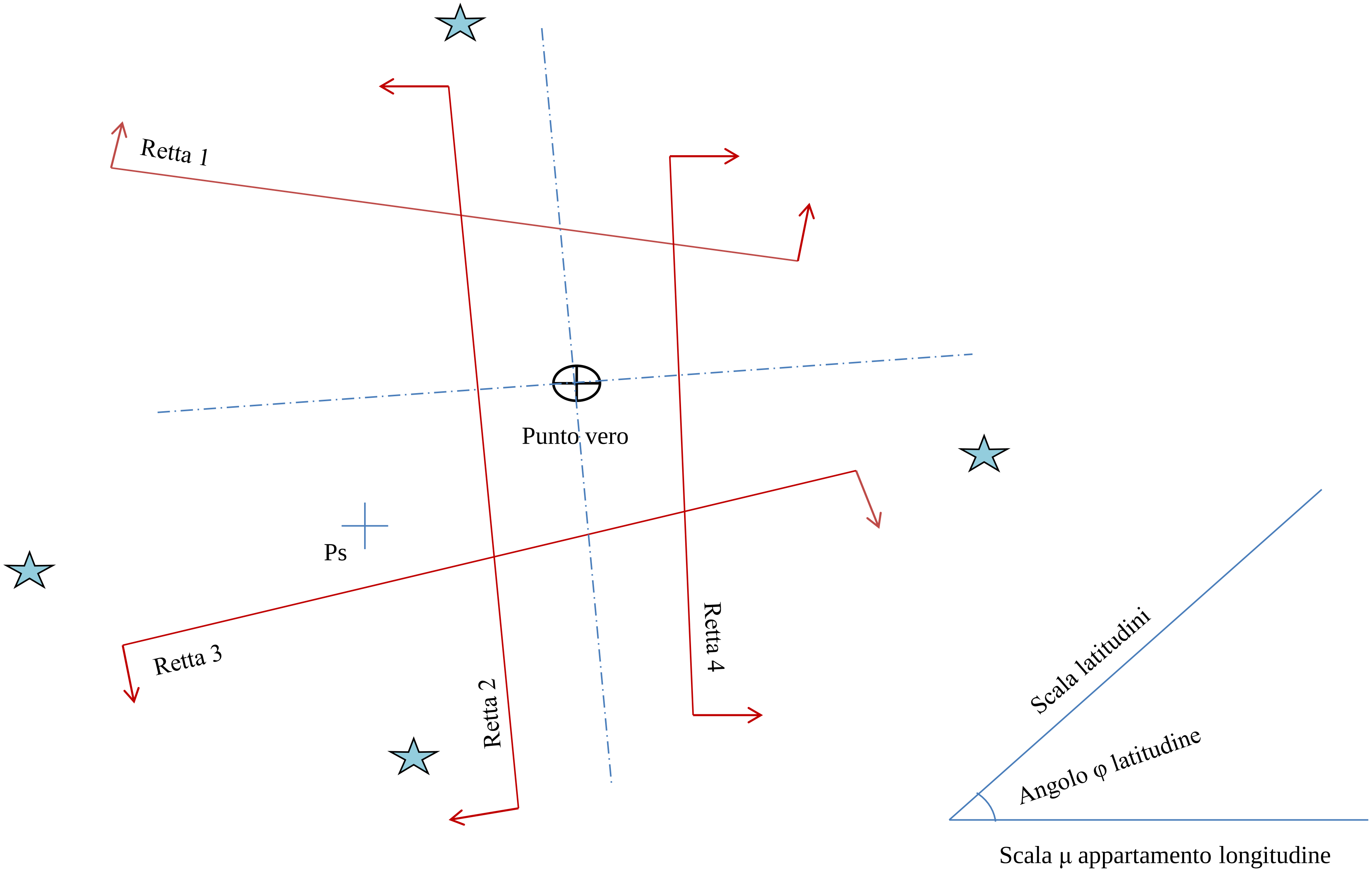
$$\varphi m = (\varphi v + \varphi s) / 2$$

$$\Delta\lambda = (\pm\mu) \cos \varphi m$$

$$\boldsymbol{\lambda v = \lambda s + (\pm\Delta\lambda)}$$

© Agostino Frosini

Soluzione grafica punto vero con quattro rette d'altezza



© Agostino Frosini

Questo sistema di calcolo analitico è stato appreso dal sottoscritto nel 1989 all'Istituto Tecnico Nautico San Giorgio di Genova per merito del Professor Sciarrone allora docente di navigazione e astronomia che ringrazio sentitamente.

Per eventuali errori ortografici, errori di calcolo o per qualunque altro dubbio scrivetemi all'indirizzo ago.pax@libero.it

© Agostino Frosini